HYDROMECHANICKÉ PROCESY

Proudění nenewtonských kapalin potrubím

(přednáška)

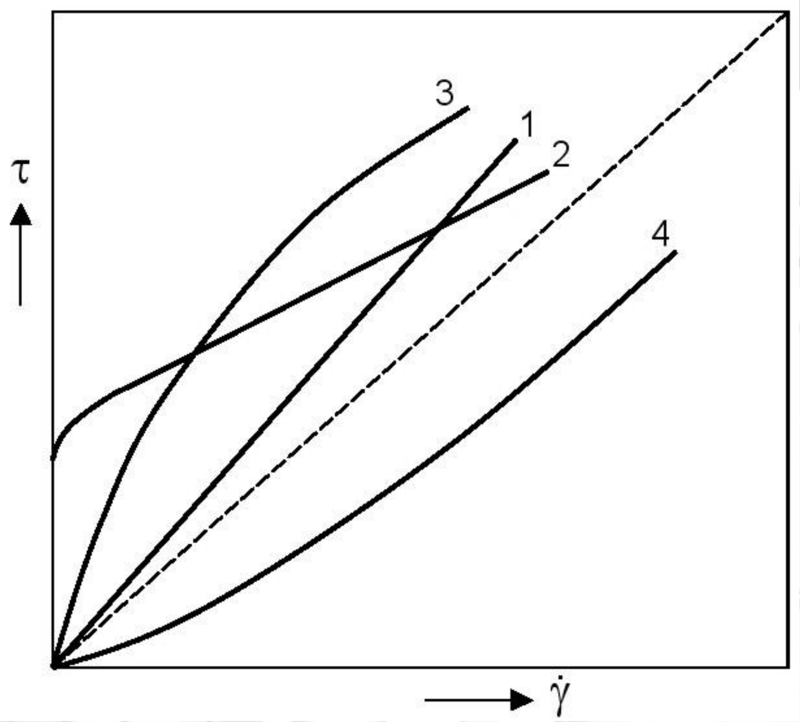
Prof. Ing. Tomáš Jirout, Ph.D.

(e-mail: Tomas.Jirout@fs.cvut.cz, tel.: 2 2435 2681)

EVROPSKÝ SOCIÁLNÍ FOND

PRAHA & EU:INVESTUJEME DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI

Základní reologické modely



1 – newtonská kapalina
2 – binghamská látka
3 – pseudoplastická kapalina
4 – dilatantní kapalina

$$\boxed{\vec{\vec{\tau}} = 2\eta\vec{\vec{\Delta}}}$$

Newtonské kapaliny: $\eta \rightarrow \mu = \mathrm{f}(T)$

Mocninové kapaliny:

$$\eta = K\left|\sqrt{2\,\mathrm{II}}\right|^{n-1} = K\left|\sqrt{2\left(\vec{\vec{\Delta}} : \vec{\vec{\Delta}}\right)}\right|^{n-1}$$

Binghamské látky:

$$\eta \rightarrow \infty \quad pro \quad \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{\tau}}\right) < \tau_0^2$$

$$\eta = \mu_p + \frac{\tau_0}{\left|\sqrt{2\left(\vec{\vec{\Delta}} : \vec{\vec{\Delta}}\right)}\right|} \quad \mathrm{pro} \quad \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{\tau}}\right) > \tau_0^2$$

Základní rovnice pro proudění v potrubí kruhového průřezu

Rovnice kontinuity pro nestlačitelné kapaliny

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{u} = 0}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,u_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial_z}=0$$

Cauchyova rovnice

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)=-\nabla p+\nabla\cdot\vec{\vec{\tau}}+\rho\,\vec{f}}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\tau_{rz}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}\right]+\rho g_z$$

Tenzor rychlosti deformace – jediná nenulová složka $\Delta_{zr} = \Delta_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}r}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\tau_{rz}\right) = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\Delta p}{l} \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz} = \frac{\Delta p}{2l}r + \frac{C_1}{r}$$

v ose potrubí (r = 0) musí být napětí konečné $\Rightarrow$ konstanta $C_1 = 0$

$$\Downarrow$$

Nenulová složka napětí

$$\boxed{\tau_{rz} = \frac{\Delta p}{2l}r}$$

Proudění mocninových kapalin

Konstitutivní rovnice

$$\vec{\vec{\tau}} = 2K\left|\sqrt{2II}\right|^{m-1}\vec{\vec{\Delta}}$$

$$II = \vec{\vec{\Delta}} : \vec{\vec{\Delta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$\tau_{rz} = K\left|\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r}\right|^{m-1}\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r} = \frac{\Delta p}{2l}r$$

Po integraci $\left(-\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r}\right)^m = \frac{-\Delta p}{2lK}r$ a zavedení okrajové podmínky ***u_z* (*r* = *R*) = 0**

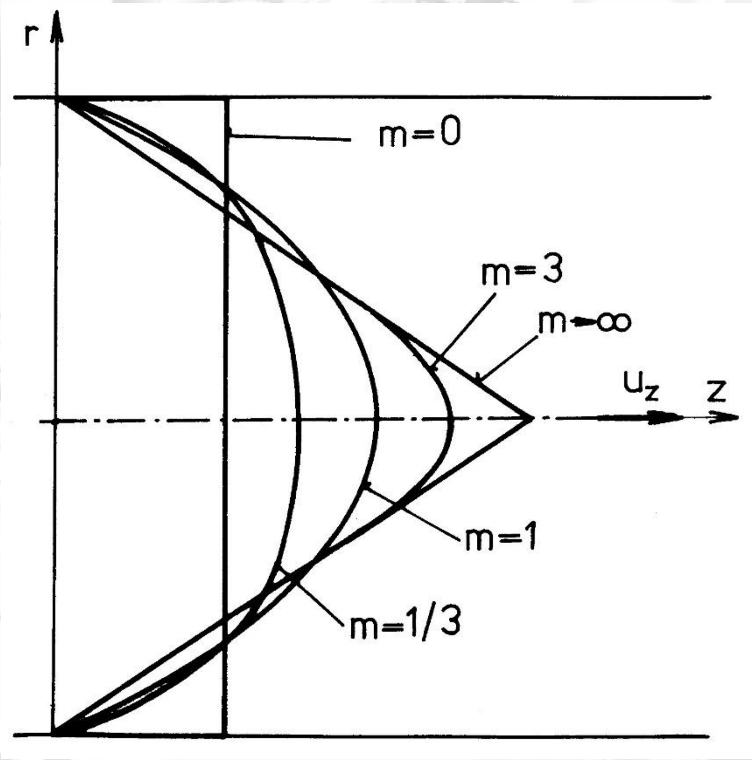
$$\Downarrow$$

Rychlostní profil

$$\boxed{u_z = \frac{m}{m+1}\left(\frac{\Delta p_z R}{2lK}\right)^{1/m} R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(m+1)/m}\right]}$$

Rychlostní profil při laminárním proudění mocninových kapalin v potrubí kruhového průřezu

$$u_z = \frac{m}{m+1}\left(\frac{\Delta p_z R}{2lK}\right)^{1/m} R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{(m+1)/m}\right]$$



Objemový průtok

$$\dot V = 2\pi\int_0^R u_z r\,\mathrm{d}r = \frac{2\pi\, m}{m+1}\left(\frac{\Delta p_z}{2lK}\right)^{1/m}\int_0^R \left(rR^{(m+1)/m} + r^{(2m+1)/m}\right)\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\dot V = \pi\,\frac{m}{3m+1}\left(\frac{\Delta p_z R}{2lK}\right)^{1/m} R^3}$$

Střední objemová rychlost

$$\bar u = \frac{\dot V}{\pi R^2} = \frac{m}{2(3m+1)}\left(\frac{\Delta p_z d}{4lK}\right)^{1/m} d$$

Ztráta mechanické energie

$$\boxed{e_z = \frac{\Delta p_z}{\rho} = \left(\frac{2(3m+1)}{m}\,\frac{\bar u}{d}\right)^m \frac{4lK}{d\rho} = \lambda\,\frac{l}{d}\,\frac{\bar u^2}{2}}$$

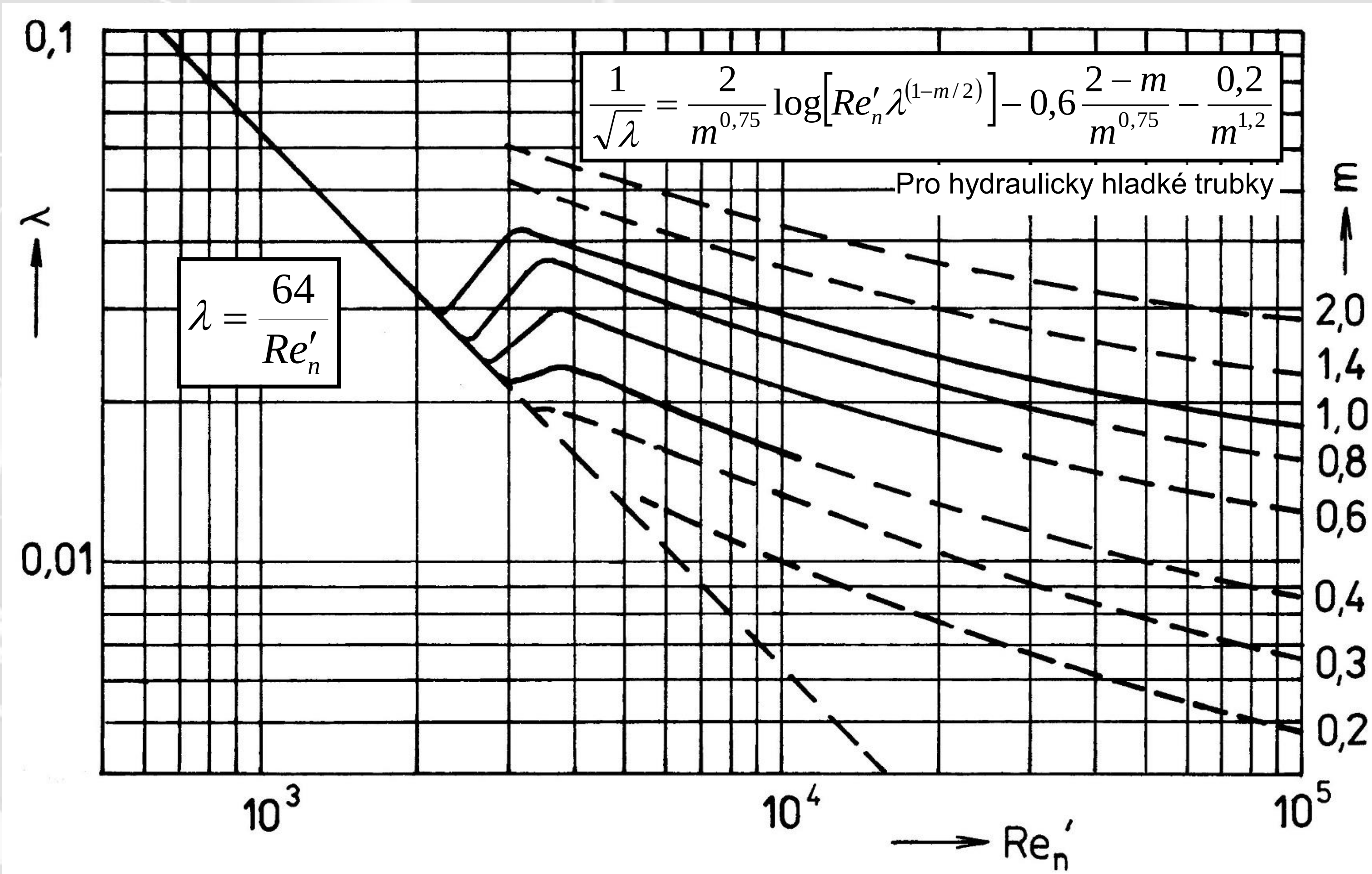
$$\Downarrow$$

Pro $\lambda = 64\left(Re'_n\right)^{-1}$ je třeba Reynoldsovo číslo definovat

$$\lambda = \left(\frac{6m+2}{m}\right)^m \frac{8K}{\bar u^{2-m} d^m \rho} = 8\left(\frac{6m+2}{m}\right)^m \frac{1}{Re_n}$$

$$\boxed{Re'_n = 8\left(\frac{m}{6m+2}\right)^m \frac{\bar u^{2-m} d^m \rho}{K}}$$

Závislost součinitele tření λ na Reynoldsově čísle Re_n´ a indexu toku m pro mocninové kapaliny



$$\lambda = f\left(Re'_n, m, k^*\right) \; ?$$

$$Re'_n = 8\left(\frac{m}{6m+2}\right)^m \frac{\overline{u}^{\,2-m} d^m \rho}{K}$$

Rabinowitschova rovnice

$$\tau_s = \frac{-\Delta p}{2l} R = \frac{\Delta p_z}{2l} R$$

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^R u_z r \,\mathrm{d} r = 2\pi \left\{ \left[u_z \frac{r^2}{2} \right]_0^R - \int_{u_{z\,\max}}^0 \frac{r^2}{2} \mathrm{d} u_z \right\} = \pi \int_0^R r^2 \left(- \frac{\mathrm{d} u_z}{dr} \right) \mathrm{d} r$$

$$\int u \,\mathrm{d} v = uv - \int v \,\mathrm{d} u$$

$$\tau_{rz} = \frac{\Delta p}{2l} r$$

$$\boxed{\dot{V} = \frac{\pi 8 l^3}{(\Delta p)^3} \int_0^{-\tau_s} \tau_{rz}^2 \left(- \frac{du_z}{dr} \right) \mathrm{d} \tau_{rz}}$$

Proudění binghamských kapalin

Konstitutivní rovnice

$$\vec{\vec{\Delta}} = 0 \quad \text{pro} \quad \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{\tau}}\right) < \tau_0^2$$

$$\vec{\vec{\tau}} = \left\{ 2\mu_p + \frac{2\tau_0}{\left|\sqrt{2\left(\vec{\vec{\Delta}} : \vec{\vec{\Delta}}\right)}\right|} \right\} \vec{\vec{\Delta}} \quad \text{pro} \quad \frac{1}{2}\left(\vec{\vec{\tau}} : \vec{\vec{\tau}}\right) > \tau_0^2$$

$$II = \vec{\vec{\Delta}} : \vec{\vec{\Delta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r}\right)^2$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r} = 0 \quad \text{pro} \quad \left|\tau_{rz}\right| < \tau_0$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,u_z}{\mathrm{d}\,r} = -\frac{\tau_{rz} + \tau_0}{\mu_p} \quad \text{pro} \quad \left|\tau_{rz}\right| > \tau_0$$

Objemový průtok – dosazení konstitutivní rovnice do Rabinowitschovy rovnice

$$\dot{V} = \frac{8\pi l^3}{(\Delta p)^3}\left[\int_0^{-\tau_0} \tau_{rz}^2 \cdot 0 \cdot \mathrm{d}\tau_{rz} + \int_{-\tau_0}^{-\tau_s} \tau_{rz}^2 \left(-\frac{\tau_{rz}+\tau_0}{\mu_p}\right)\mathrm{d}\tau_{rz}\right]$$

$$\boxed{\dot{V} = \frac{\pi \Delta p_z d^4}{128\mu_p l}\left[1-\frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_s}+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_s}\right)^4\right]}$$

Ztráta mechanické energie

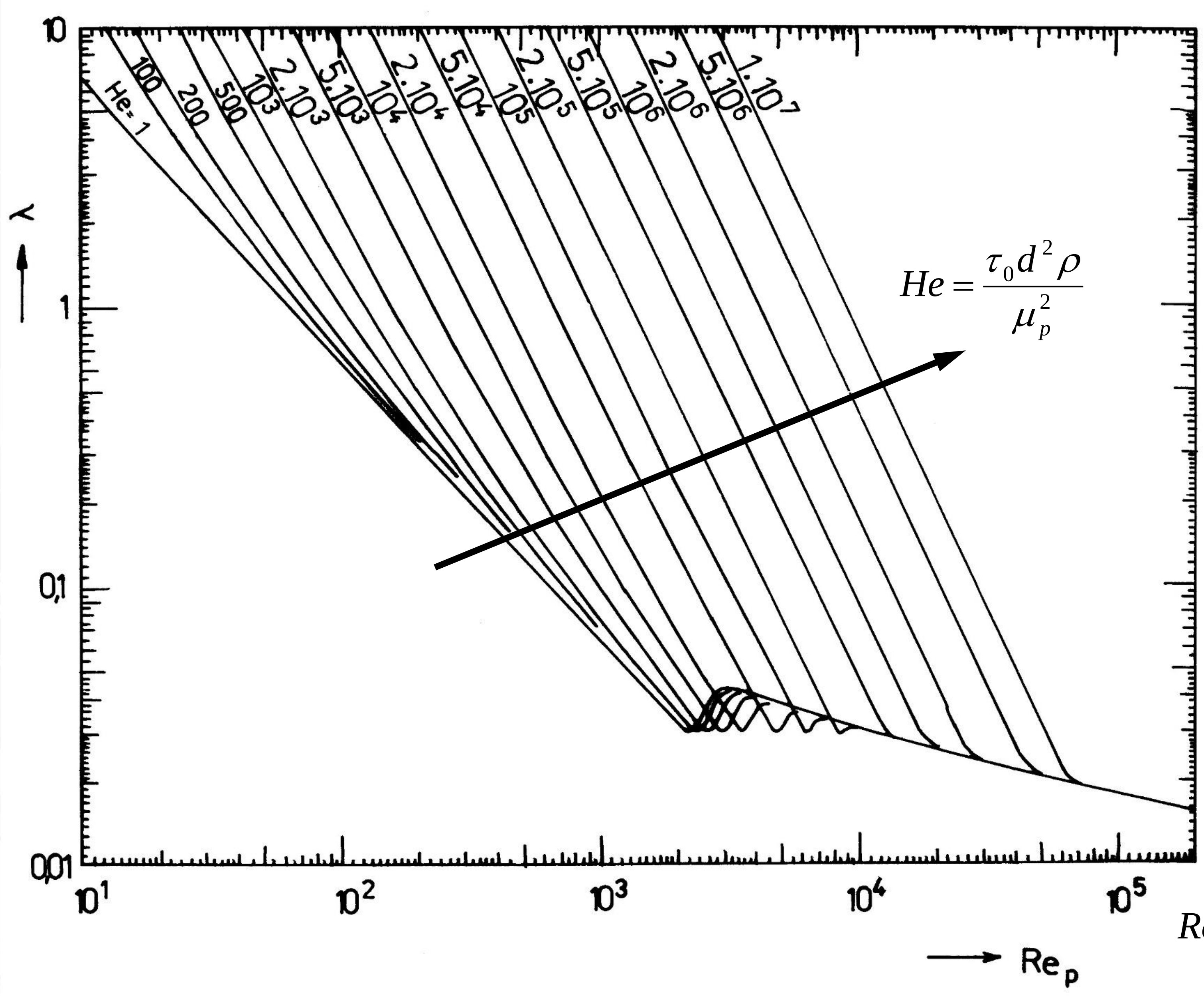
$$\Delta p_z = \lambda \frac{l}{d}\frac{\bar{u}^2}{2}\rho \quad \xRightarrow{\bullet\, d\rho/\mu_p} \quad \boxed{Re_p = \frac{1}{64}\lambda Re_p^2 - \frac{1}{6}He + \frac{64}{3}\frac{He^4}{Re_p^6\lambda^3}}$$

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \frac{\Delta p_z d^2}{32\mu_p l}\left[1-\frac{4}{3}\frac{\tau_0}{\tau_s}+\frac{1}{3}\left(\frac{\tau_0}{\tau_s}\right)^4\right]$$

$$Re_p = \frac{\bar{u} d\rho}{\mu_p}$$

$$He = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\mu_p^2}$$

Závislost součinitele tření v potrubí λ na Reynoldsově čísle Re_p a Hedströmově čísle He



$$He = \frac{\tau_0 d^2 \rho}{\mu_p^2}$$

$$Re_p = \frac{\bar{u} d \rho}{\mu_p}$$

Pro Hedströmovo číslo $He = 0$ přejde rovnice (2.1 – 29) ve známý vztah platný při laminárním proudění newtonských kapalin:

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

Pokud jde o turbulentní proudění binghamských kapalin, shoduje se většina autorů v závěru, že součinitel tření nezávisí příliš na Hedströmově čísle a k jeho určení je možno užít vztahů platných pro newtonské kapaliny. Na základě toho byla sestavena korelace pro vyjádření součinitele třecí ztráty:

$$\lambda = 8\left[\left(\frac{8c_2}{Re_p}\right)^{12} + \left(a_2 + b_2\right)^{-1,5}\right]^{1/12},$$

kde

$$a_2 = \left\{-2,457\ln\left[\left(\frac{7}{Re_p}\right)^{0,9} + 0,27k^*\right]\right\}^{16}$$

$$b_2 = \left(\frac{37530c_2}{Re_p}\right)^{16}$$

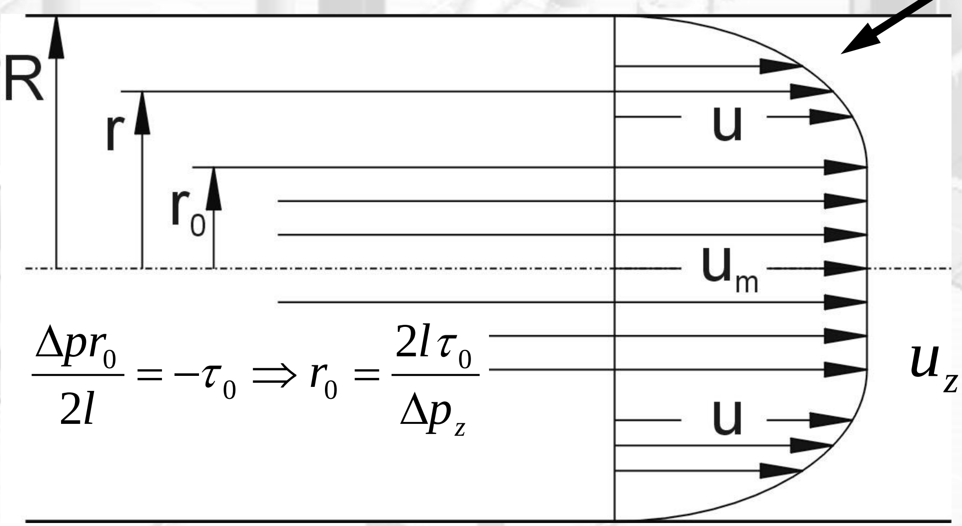
$$c_2 = \left[1 + 0,105\left(\frac{He}{Re_p}\right)^{1,11}\right]^{0,9}$$

Rychlostní profil při proudění binghamské kapaliny trubkou kruhového průřezu

$$\tau_{rz} = \mu_p \frac{du_z}{dr} - \tau_0 = \frac{\Delta p}{2l} r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u_z = \frac{\Delta p_z}{4\mu_p l}\left(R^2 - r^2\right) - \frac{\tau_0}{\mu_p}\left(R - r\right)}$$

$$r_0 \langle r \langle R$$



$$\frac{\Delta p r_0}{2l} = -\tau_0 \Rightarrow r_0 = \frac{2l\tau_0}{\Delta p_z}$$

$$u_{z,\max} = u_z\left(r = r_0\right)$$

Obecná metoda výpočtu ztráty
laminární proudění nenewtonských kapalin potrubím

$$\dot{V} = \frac{\pi 8 l^3}{(\Delta p)^3} \int_0^{-\tau_s} \tau_{rz}^2 \left(-\frac{du_z}{dr} \right) \mathrm{d}\,\tau_{rz} \quad \Bigg| \bullet \frac{4}{\pi\, R^3}$$

$$\Downarrow$$

Konzistenční proměnné

$$\boxed{D_s = \frac{4\dot{V}}{\pi R^3} = -\frac{4}{\tau_s^3} \int_0^{-\tau_s} \tau_{rz}^2\, \mathrm{f}_1(\tau_{rz})\,\mathrm{d}\,\tau_{rz} = \mathrm{f}_2(\tau_s)}$$